/* —— *

Newton-Raphson 法

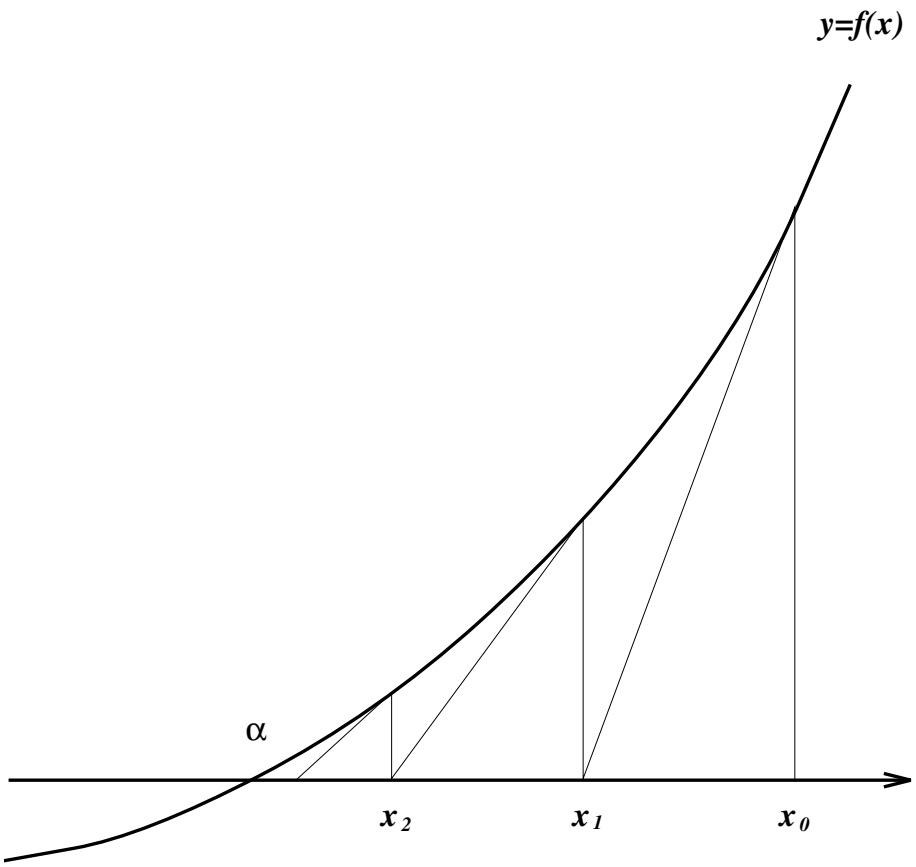
方程式 $f(x) = 0$ を解くためには、漸化式

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \cdots\cdots\ (\star)$$

を、適当な初期値 a に対して解いて、数列 $\{x_n\}$ を構成する。
初期値 a がうまく与えられれば、この数列は上述の方程式の
1つの解 α に、収束することが知られている, *i.e.* ,

$$\exists\ \alpha = \lim_{n \to \infty} x_n \quad such\ that \quad f(\alpha) = 0\ .$$

漸化式 $(\star)$ の意味とその収束の様子は、次の図と式を見れば
一目瞭然である。



$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ $\cdots\cdots$ 点 $(x_n, f(x_n))$ を通る接線の方程式

$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $\cdots\cdots$ 上記の接線と x 軸との交点の x 座標

数列 $\{x_n\}$ の収束性の証明および収束のオーダーの評価は、

それほど簡単なことではない。ϵ-δ 論法と解析学に関する
知識が必要とされる。興味のある学生には、参考文献を紹介する。

以下の C ソース newton.c は、方程式

$$x^2 - 5 = 0$$

の解の 1 つが $\sqrt{5}$ であることに注目して、Newton-Raphson 法で $\sqrt{5}$
を求めるプログラムである。 A, F(X), DF(X) の定義をいろいろ
と変えて、各人で数値実験を行ってみよう。

```
* ____________________________________________________________________ */

/* ____________________________________ newton.c ____________________________________ */


#include <stdio.h>
#define A 4.                        /* 初期値                                    */
#define F(X) ((X)*(X)-5.)           /* 与えられた関数                            */
#define DF(X) (2.*(X))              /* その導関数                                */

main()
{
    double x, y;                    /* 倍精度で計算する                          */

    x = A;                          /* x_0 = a                                   */
    printf("%.16f\n", x);           /* x_0 の表示                                */
    y = x - F(x) / DF(x);           /* x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)
                                                                                  */
    printf("%.16f\n", y);           /* x_1 の表示                                */
    while (x != y)                  /* iteration をやっても値が変わらなくなったら終了 */
    {
        x = y;
        y = x - F(x) / DF(x);       /* x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)            */
        printf("%.16f\n", y);       /* x_{n+1} の表示                            */
    }
}
```